المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة n ذوات المعاملات الثابتة :

★ نعلم بأن المعادلة :

$$y^{(n)} + a_{n-1}\cdot y^{(n-1)} + \text{———} + a_1\cdot y' + a_0\cdot y = F(x) \quad \text{—} ①$$

حيث $a_0, a_1, \text{———}$ و a_{n-1} هي أعداد حقيقية تدعى المعادلة تفاضلية الخطية ذات معاملات ثابتة .!

• المعادلة المتجانسة المناظرة لها هي :

$$y^{(n)} + a_{n-1}\cdot y^{(n+1)} + \text{———} + a_1\cdot y' + a_0\cdot y = 0 \quad \text{—} ②$$

والحل العام للمعادلة [1] يعطى بالعلاقة :

$$y = y_h + y_p$$

حيث y_h هو الحل العام لـ [2]

و y_p هو الحل الخاص للمعادلة [1]

وكل من y_h و y_p يعتمد على قاعدة الحلول ، وذكرنا في محاضرة سابقة أن مثل هذه المعادلات لها طريقة محددة لإيجاد قاعدة الحلول .

• قبل البدء بدراسة طريقة لإيجاد قاعدة الحلول لدينا مفهومين جديدين سنستعرضهما:
الأول: المؤثر التفاضلي D.
الثاني: المؤثر التفاضلي العكسي .

[1] المؤثر التفاضلي: المؤثر التفاضلي D هو بالتعريف ذلك المؤثر الذي إذا أثر على الدالة y كان الناتج التأثير هو y' أي أن : $Dy = y'$

لكن $y' = \frac{d}{dx} y$ أي أن $D = \frac{d}{dx}$

وعدم وجود دالة على يمين ليس له أي معنى.

SUBJECT:

ونلاحظ من خلال المثال الآتي D عندما يؤثر على الدالة:

$$D\ln x = \frac{1}{x}$$

$$y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$ بعد التأثير

نلاحظ أن المؤثر التفاضلي عندما أثر على دالة ما وهي الدالة اللوغاريتمية في هذا المثال كان ناتج التأثير هو الدالة $\frac{1}{x}$ أي أن المؤثر التفاضلي D غير شكل الدالة ولم يغير من المتغير المستقل كما في أمثلة أخرى.

★ نعرف المؤثر التفاضلي D^2 بأنه ذلك المؤثر الذي إذا أثر على الدالة y كان ناتج التأثير هو y''

$$D^2 y = y''$$

ليس $y D^2 x$ لا معنى ???

$$y'' = \frac{d_2}{dx^2} y$$

$$D^2 = \frac{d_2}{dx^2} \Leftarrow$$

بشكل عام نعرف المؤثر التفاضلي D^n بأنه ذلك المؤثر الذي إذا أثر على الدالة y كان ناتج التأثير هو المشتقة من الرتبة (n) للدالة (y) أي أن:

$$D^n y = y^{(n)}$$

وبما أن:

$$y^n = \frac{d_n}{dx^n} y \Rightarrow D^n = \frac{d_n}{dx^n}$$

بناءً على ما سبق فإن المعادلة التفاضلية:

$$y^4 + 2y''' - y'' + 2y = \sin x$$

نكتبه باستخدام المؤثر التفاضلي D على الصورة:

$$[D^4 + 2D^3 - D^2 + 2]\, y = \sin x$$

أو اختصاراً

$$\varphi(D).y = \sin x$$

حيث: $\varphi(D) = D^4 + 2D^3 - D^2 + 2$

وندعو $\varphi(D)$ المؤثر التفاضلي كثير الحدود من الدرجة الرابعة.

أما المعادلة التفاضلية (1) فتكتب اختصاراً على النحو:

$$(D^n + a_{n-1} \cdot D^{n-1} + ___ + a_1 \cdot D + a_0) y = f(x)$$

أو اختصاراً:

$$\varphi(D) y = f(x)$$

حيث: $\varphi(D) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot D^j \; , \; a_n = 1$

وندعو $\varphi(D)$ في هذه الحالة مؤثر تفاضلي كثير حدود من الدرجة n

★ هناك دوال لا يتغير شكلها إذا أثر عليها مؤثر تفاضلي

$$D \cdot e^{mx} = m \cdot e^{mx}$$

$$D^2 \cdot e^{mx} = m^2 \cdot e^{mx} , ____ , D^n \cdot e^{mx} = m^n \cdot e^{mx}$$

الدوال المميزة والقيم المميزة:

• إذا أثر المؤثر التفاضلي D على دالة ما ولم يتغير شكل الدالة عندئذٍ ندعو هذه الدالة بالدالة المميزة للمؤثر التفاضلي والقيمة العددية المرافقة لناتج التأثير ندعوها القيمة المميزة

★ بناءً على هذا التعريف نجد أن الدالة: $y = e^{mx}$

هي دالة مميزة للمؤثر التفاضلي D بقيمة مميزة مقدارها m لأنه D عندما يؤثر على y

المميزة الوحيدة للمؤثر التفاضلي D $D \cdot e^{mx} = m \cdot e^{mx}$ كما أن الدالة e^{mx} هي دالة مميزة

$D^2 \cdot e^{mx} = m^2 \cdot e^{mx}$

وهذه الدالة ليست الدالة الوحيدة للمؤثر التفاضلي D^2 إذ أن الدالة: $\cos mx$ دالة مميزة للمؤثر التفاضلي D^2 بقيمة مميزة $-m^2$ لأن:

$$D^2 \cdot \cos mx = -m^2 \cdot \cos mx$$

كذلك الدالة $y = \sin mx$ هي دالة مميزة للمؤثر التفاضلي D^2 بقيمة مميزة مقدارها $-m^2$ وذلك لأن: $D^2 \cdot \sin mx = -m^2 \cdot \sin mx$

• أيضاً الدالة $sh\,mx$ هي دالة مميزة للمؤثر التفاضلي D^2 بقيمة مميزة m^2 وذلك كون:

$$D^2 sh\,x = m^2 . sh\,mx$$

• وكذلك أيضاً الدالة $ch\,mx$ هي دالة مميزة للمؤثر التفاضلي D^2 بقيمة مميزة مقدارها m^2 وذلك كون:

$$D^2 ch\,mx = m^2 . ch\,mx$$

بشكل عام: الدالة e^{mx} هي دالة مميزة للمؤثر التفاضلي D^n بقيمة مميزة مقدارها m^n وذلك كون:

$$D^n . e^{mx} = m^n . e^{mx}$$

وفي الحالة العامة فإن هذه الدالة ليست الدالة المميزة الوحيدة للمؤثر التفاضلي D^n.

ـ خواص المؤثر التفاضلي:

1- المؤثر التفاضلي يتبادل الموقع مع الثابتة الضربي أي أن:

$$DAy = ADy$$

بشكل عام

$$D^n Ay = A . D^n y$$

وعلى وجه العموم فإن:

$$\varphi(D) Ay = A \varphi(D) y$$

$$\varphi(D) Ay = \sum_{j=0}^{n} a_j . D^j = \sum_{j=0}^{n} a_j . A D^j y$$

$$= A . \underbrace{\sum_{j=0}^{n} a_j . D^j}_{\varphi(D)} . y = A . \varphi(D) . y$$

2- المؤثر التفاضلي خطي أي أن:

$$D(A_1 . y_1 + A_2 . y_2) = A_1 D y_1 + A_2 . D y_2$$

بشكل عام:
$$D^{j}(A_1 y_1 + A_2 y_2) = A_1 D^{j} y_1 + A_2 D^{j} y_2$$

على وجه العموم:
$$\varphi(D)(A_1 y_1 + A_2 y_2) = A_1 \varphi(D) y_1 + A_2 \varphi(D) y_2$$

$$\varphi(D)(A_1 y_1 + A_2 y_2) = \sum_{j=0}^{n} a_j D^{j}(A_1 y_1 + A_2 y_2)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j (A_1 D^{j} y_1 + A_2 D^{j} y_2)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j A_1 D^{j} y_1 + \sum_{j=0}^{n} a_j A_2 D^{j} y_2$$

$$= A_1 \sum_{j=0}^{n} a_j D^{j} y_1 + A_2 \sum_{j=0}^{n} a_j D^{j} y_2$$

$$= A_1 \varphi(D) y_1 + A_2 \varphi(D) y_2$$

٣- المؤثر التفاضلي يخضع إلى قانون الأسس [أي ضرب القوى جمع الأسس] أي أن:

$$D^{n} D^{m} y = D^{m} D^{n} y = D^{m+n} y$$

٤- إذا كان $\varphi_1(D)$ و $\varphi_2(D)$ و $\varphi_3(D)$ ثلاث مؤثرات تفاضلية كل منها كثيرة حدود فعندئذ:

$$\{\varphi_1(D) + \varphi_2(D)\} y = \{\varphi_2(D) + \varphi_1(D)\} y \quad \text{—— ★}$$

$$\{\varphi_1(D) + (\varphi_2(D) + \varphi_3(D))\} y$$

$$= \{(\varphi_1(D) + \varphi_2(D)) + \varphi_3(D)\} y \quad \text{—— ★★}$$ الجمع تجميعي

$$\{\varphi_1(D) \cdot \varphi_2(D)\} y = \{\varphi_2(D) \cdot \varphi_1(D)\} y$$ الضرب التبديلي —— ★★★

$$\{\varphi_1(D)\cdot(\varphi_2(D)\cdot\varphi_3(D))\}y = \{(\varphi_2(D)\cdot\varphi_1(D))\cdot\varphi_3(D)\}y \quad (\star\star\star\star)$$

$$\{\varphi_1(D)\cdot(\varphi_2(D)+\varphi_3(D))\}y = \{\varphi_1(D)\cdot\varphi_2(D)+\varphi_1(D)\cdot\varphi_3(D)\}y \quad (\star\star\star\star\star)$$

ملاحظة هامة: الخواص السابقة لا تتحقق إذا لم يكن المؤثر التفاضلي كثير حدود ذات معاملات ثابتة.

والمثال التالي يوضح ~~صحة~~ صحة هذه الملاحظة:

مثال: أوجد ناتج: $(XD+1)Dy$

- $(XD+1)Dy = (XD+1)y' = XDy' + y'$
  $= Xy'' + y'$

- $D(XD+1)y$
  $D(XDy+y) = D(Xy'+y) = DXy' + Dy = y' + Xy'' + y'$
  $= Xy'' + 2y'$

نلاحظ أن $(XD+1)Dy \neq D(XD+1)y$

أي أن الضرب غير تبديلي عندما يكون المعاملات متغيرة.

-٥- إذا كان المؤثر التفاضلي $\varphi(D)$ كثير حدود من الدرجة n فعندئذٍ:

$$\varphi(D)y = \{(D-m_1)(D-m_2) \text{———} (D-m_n)\}y$$

m_1, m_2, m_n هي جذور المعادلة $\varphi(D)=0$

يمكن تحليل المؤثر كثير الحدود إلى جداء عوامل أولية وكون المعاملات ثابتة فالترتيب ليس له معنى.

مثال توضيحي: أوجد ناتج: $(D^2+4D+3)(X+e^{-X})$

الحل:

$$= (D^2+4D+3)X + (D^2+4D+3)e^{-X}$$

$$= (D^2X + 4DX + 3X) + (D^2\cdot e^{-X} + 4D\cdot e^{-X} + 3\cdot e^{-X})$$

$= (0+4+3x) + (e^{-x} - 4e^{-x} + 3e^{-x})$

$= 3x + 4$

(2b)

$(D^2+4D+3)(x+e^{-x})$

$= (D+1)(D+3)(x+e^{-x})$

$= (D+1)[(D+3)x + (D+3).e^{-x}] = (D+1).[Dx + 3x + De^{-x} + 3e^{-x}]$

$= (D+1).[1 + 3x - e^{-x} + 3e^{-x}] = (D+1)[3x+1+2.e^{-x}]$

$= D(3x+1) + (3x+1) + (D+1).2e^{-x}$

$= 3 + 3x + 1 + 2[D.e^{-x} + e^{-x}]$

$= 4 + 3x + 2[-e^{-x} + e^{-x}] = 3x + 4$

ج. الدالة الأسية e^{mx} دالة مميزة بالمؤثر التفاضلي كثير الحدود $\varphi(D)$ بقيمة مميزة مقدارها $\varphi(m)$

أي أن: $\varphi(D).e^{mx} = \varphi(m).e^{mx}$

الإثبات: نعلم أن:

$D.e^{mx} = m.e^{mx}$

$D^2.e^{mx} = m^2.e^{mx}$

$D^j.e^{mx} = m^j.e^{mx}$

$$\varphi(D).e^{mx} = \sum_{j=0}^{n} a_j.D^j.e^{mx} = \sum_{j=0}^{n} a_j.m^j.e^{mx} = \varphi(m).e^{mx}$$

مثال: أوجد ناتج:

$D = m = 2$

$(D^6 + 2D^2 + 3D + 1).e^{2x}$

$= (2^6 + 2(2)^2 + 3(2) + 1).e^{2x} = (64+8+6+1).e^{2x}$

$= 79.e^{2x}$

٧- خاصة الزحزحة الأسية:

. عندما يؤثر المؤثر التفاضلي $\varphi(D)[e^{mx} \cdot v(x)]$

. ناتج تأثير يساوي

. أي أن الشئ الذي يدفع لإخراج الدالة الأسية من تحت $e^{mx} \varphi(D+m) \cdot v(x)$

. تأثير المؤثر التفاضلي كثير الحدود هو أن نعوض كل D ب $(D+m)$

الإثبات:

$$D[e^{mx} \cdot v(x)] = m e^{mx} \cdot v(x) + e^{mx} D \cdot v(x)$$

$$= e^{mx}[m + D] \cdot V(x)$$

$$D^2 e^{mx} \cdot V(x) = D D \cdot e^{mx} \cdot V(x)$$

$$= D[e^{mx}[D+m] \cdot V(x)] = m \cdot e^{mx}(D+m) \cdot V(x) + D e^{mx}(D+m) \cdot V(x)$$

$$= e^{mx}[m(D+m) \cdot V(x) + D(D+m) \cdot V(x)]$$

$$= e^{mx}[m(D+m) + D(D+m)] \cdot V(x)$$

$$= e^{mx}[m + D](D+m) \cdot V(x) = e^{mx} \cdot (D+m)^2 \cdot V(x)$$

بشكل عام فإن:

$$D^n e^{mx} \cdot V(x) = m^n \cdot e^{mx} \cdot V(x) + n \cdot m^{n-1} \cdot e^{mx} D \cdot V(x) +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!} \cdot m^{n-2} e^{mx} D^2 \cdot V(x) + \text{———} + e^{mx} \cdot D^n \cdot V(x)$$

وذلك بالاعتماد على قانون ليبنتز للمشتقات العليا.

$$(U \cdot V)^n = U^n \cdot V + n \cdot U^{n-1} v' + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot U^{n-2} v'' + \text{———} + U \cdot v^n$$

SUBJECT: / /

$$D^n e^{mx} \cdot v(x) = e^{mx}\left[m^n v(x) + n \cdot m^{n-1} D \cdot v(x) + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot m^{n-2} D \cdot v(x) + ____ + D^n \cdot v(x)\right]$$

$$= e^{mx}\left[m^n + n \cdot m^{n-1} \cdot D + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot m^{n-2} D^2 + ____ + D^n\right] \cdot v(x)$$

$$= e^{mx} (D+m)^n \cdot V(x)$$

وبالتالي فإن:

$$\varphi(D) \cdot e^{mx} \cdot V(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot D^j \cdot e^{mx} \cdot V(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot e^{mx} (D+m)^j \cdot V(x)$$

$$= e^{mx} \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot (D+m)^j \cdot V(x) = e^{mx} \varphi(D+m) \cdot V(x)$$

[illegible]